Revista Colombiana de Física, Vol. 42, No. 2 de 2010.

Cuantización Canónica del Campo del Oscilador de Dirac

Canonical Quantization of Dirac Oscillator Field

Y. F. Pérez [*a,c], C. J. Quimbay[b,c]

[a] *Escuela de Física, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja*
[b] *Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D. C.*
[c] *Grupo de Campos y Partículas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D. C.*

Recibido 24.03.10; Aceptado 24.07.10; Publicado en línea 17.01.11.

Resumen

El sistema constituido por un fermión masivo relativista sometido a la acción de un potencial lineal se conoce como oscilador de Dirac. Diferentes aspectos de este sistema en una, dos y tres dimensiones han sido estudiados ampliamente en la literatura, pero sin embargo hasta el momento no se ha considerado el oscilador de Dirac como un sistema libre y no se ha realizado su cuantización. En este trabajo implementamos la cuantización canónica del campo del oscilador de Dirac unidimensional, siguiendo el procedimiento usual empleado para campos libres. Obtenemos el operador Hamiltoniano del sistema, el cual podemos escribir en términos de los operadores creación y destrucción de partícula y antipartícula, los cuales satisfacen las tradicionales relaciones de anticonmutación. A partir de estos resultados, obtenemos el propagador de Feynman para el campo del oscilador de Dirac. Finalmente estudiamos las diferencias existentes entre el campo del oscilador de Dirac y el campo de Dirac libre.

Palabras Clave: Soluciones de ecuaciones de onda: estados ligados; Formalismo canónico, lagrangianos y principios variacionales; Cuantización canónica; Teoría de Campos.

Abstract

The system constituted by a relativistic massive fermion under the action of a linear potential is known as Dirac Oscillator. This system for one, two and three dimensions has been widely studied in literature, however its quantization as a free system has not been performed until now. The main object of this paper is to implement the canonical quantization for the one-dimensional Dirac oscillator field, considering it as a free field. First we obtain a Hamiltonian operator for this system in terms of particle creation and annihilation operators. These operators satisfy traditional canonical anticonmutation relations. Then we obtain the Feynman propagator for the Dirac oscillator field. Finally, we study the differences among Dirac oscillator and free Dirac fields.

Keywords: Solutions of wave equations: bound states; Canonical formalism, Lagrangians, and variational principles; Canonical quantization; Field theory.
PACS: 11.10.-z, 12.90.+b.

©2010. Revista Colombiana de Física. Todos los derechos reservados.

1. Introducción

Los estados cuánticos de un fermión masivo relativista están descritos por funciones de onda de cuatro componentes denominadas espinores de Dirac. Estas funciones de onda, soluciones de la ecuación de Dirac, describen fermiones de energía positiva (partículas) y fermiones de energía negativa (antipartículas). Para el caso en que el fermión posea carga eléctrica, su interacción electromagnética puede incluirse mediante el cuadripotencial electromagnético A^{μ},

[*] yuber.perez@uptc.edu.co

que se introduce en la ecuación de Dirac mediante la denominada substitución minima modificando el cuadrimomento como $p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu$. De una forma análoga, mediante la sustitución del momentum $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - im\omega\beta\vec{r}$, siendo m la masa del fermión, ω la frecuencia del oscilador y $\vec{r}$ la posición, es posible considerar en la ecuación de Dirac el efecto de un potencial armónico actuando sobre un fermión relativista. La diferencia de este sistema con respecto a la situación electromagnética es que en este caso no existe una sustición mínima, sino que el potencial cuadrático actuando sobre el fermión se ha escrito de una forma linealizada.

El sistema con el potencial armónico linealizado fue estudiado inicialmente por Itô et al. [1] y Cook [2], y posteriormente fue bautizado como oscilador de Dirac por M. Moshinski y A. Szczepaniak [3], puesto que en el límite no relativista se comporta como un oscilador armónico con un término de acoplamiento fuerte de espín-orbita. Como un problema mecánico cuántico relativista, el oscilador de Dirac ha sido estudiado desde diferentes puntos de vista y diversos aspectos de este sistema han sido considerados en la literatura para los casos de dimensiones (1+1), (2+1) y (3+1) [4]-[18]. Entre otros aspectos se han estudiado sus propiedades de covariancia [4], su espectro completo de energía y sus correspondientes funciones de onda [5], las simetrías de su álgebra de Lie [6], la ausencia de la paradoja de Klein en este sistema [8], sus propiedades de invariancia conforme [9], la completez de sus funciones de onda [11], sus funciones de Green de dos puntos [12], su solución exacta en la representación de momentum [13], su álgebra deformada covariante de Lorentz en el caso de dimensión (1+1) [14], la obtención de su propagador usando la integral de camino de Feynman para el caso de dimensión (1+1) [15], una nueva representación usando el álgebra de Clifford [16], su dinámica en presencia de campos externos [17] y los efectos de un campo magnético externo en el caso de dimensión (2+1) [18].

Dentro de las posibles aplicaciones, el oscilador de Dirac se ha usado para calcular el espectro de mesones y bariones (ver por ejemplo [19]-[20] y referencias allí), se ha discutido su conección para el caso de dimensión (2+1) con fenómenos en física de la materia condensada tales como el efecto Hall cuántico y la estadística fraccional [21]-[22], y se han establecido sus implicaciones en modelos del plasma de quarks y gluones [23]. Un hecho para destacar es que hasta el momento en la literatura no se encuentra un tratamiento canónico desde el punto de vista de la Teoría de Campos Cuánticos para el oscilador de Dirac. Precisamente, aprovechando el hecho de que este sistema es especial en el sentido en que no presenta la paradoja de Klein [8], lo cual implica que es posible diferenciar los estados con energías positivas y negativas en un proceso de segunda cuantización [24], es lo que nos lleva a proponer como principal objetivo de esta trabajo implementar la cuantización canónica del oscilador de Dirac para el caso de dimensión (1+1). Para esto consideramos al oscilador de Dirac como un sistema libre y procedemos a cuantizar canónicamente al campo del oscilador de Dirac siguiendo el procedimiento tradicional de cuantización canónica de la Teoría de Campos Cuánticos. Teniendo en cuenta que los operadores creación y destrucción de partícula y antipartícula satisfacen las tradicionales relaciones de anticonmutación canónicas, es posible obtener el operador Hamiltoniano del sistema de una forma conveniente. A partir de este resultado, obtenemos el propagador de Feynman para el campo del oscilador de Dirac. Finalmente estudiamos las diferencias existentes entre el campo del oscilador de Dirac y el campo de Dirac libre.

El contenido de este artículo se presenta de la siguiente manera. En la segunda sección se estudia la manera estándar de introducir la interacción tipo oscilador en la ecuación de Dirac, se calcula el espectro de energías de este sistema, se obtienen las funciones de onda en el espacio de coordenadas normalizadas y se escribe la ecuación del oscilador de Dirac en forma explícitamente covariante, haciendo una analogía con un sistema físico particular. En la tercera sección se estudia la cuantización canónica del oscilador de Dirac unidimensional, derivando inicialmente las ecuaciones de movimiento del campo del oscilador de Dirac a partir de la densidad lagrangiana, luego se realiza la cuantización del campo del oscilador de Dirac mediante la imposición de las relaciones de anticonmutación de Jordan-Wigner de los campos fermiónicos y posteriormente mediante la expansión en series de Fourier se encuentran los operadores de creación y destrucción en términos de los cuales se escribe el operador Hamiltoniano del sistema. En la cuarta sección se obtiene el propagador de Feynman para este sistema, tanto en el espacio de coordenadas como en el espacio de momentos y se estudian algunas de las diferencias con el propagador del campo de Dirac libre. Finalmente se presentan las conclusiones y agradecimientos de este trabajo.

2. Oscilador de Dirac unidimensional

Uno de los ejemplos más conocidos e importantes de la Mecánica Cuántica no relativista es el oscilador armónico, debido a que es un sistema simple y particularmente útil para distintos modelos y aplicaciones. Su simplicidad radica en que su operador Hamiltoniano es cuadrático tanto en los momentos como en las coordenadas. Para buscar un sistema análogo en Mecánica Cuántica relativista, que implique la acción de potencial armónico sobre un fermión, es necesario tener en cuenta que la ecuación de Dirac corresponde a la linealización de la ecuación de Schrödinger relativista, por lo que el potencial armónico debe introducirse como su raíz cuadrada, es decir como un potencial lineal. A tal sistema se

le conoce como oscilador de Dirac [3]-[23].

Para introducir la interacción de oscilador sobre un fermión relativista de masa m, moviéndose en la dirección del eje z, se lleva a cabo en la ecuación de Dirac la siguiente sustitución no-mínima del operador momentum [3, 5, 10]:

$$\hat{p}_z \to \hat{p}_z - im\omega\gamma^0\hat{z}, \tag{1}$$

siendo ω la frecuencia asociada al oscilador. La ecuación de Dirac para esta interacción toma la forma ($\hbar = c = 1$):

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = (\alpha_3 \cdot (\hat{p}_z - im\omega\beta\hat{z}) + \beta m)\,|\psi\rangle. \tag{2}$$

A continuación se soluciona la ecuación (2), obteniéndose el espectro de energía y las funciones de onda. Como se muestra más adelante, las funciones de onda obtenidas se usarán en el procedimiento de cuantización canónica del sistema. Puesto que la interacción no mezcla energías negativas y positivas, se puede reescribir el espinor de cuatro componentes en (2) como

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} |\phi\rangle \\ |\chi\rangle \end{pmatrix}, \tag{3}$$

donde $|\phi\rangle$ y $|\chi\rangle$ son espinores de dos componentes, que representan las soluciones de energía positiva y negativa, respectivamente. Utilizando la representación estándar de las matrices de Dirac, la Ecuación (2) no dependiente del tiempo toma la forma

$$\begin{pmatrix} m & \sigma_3 \cdot (\hat{p}_z + im\omega\hat{z}) \\ \sigma_3 \cdot (\hat{p}_z - im\omega\hat{z}) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\phi\rangle \\ |\chi\rangle \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} |\phi\rangle \\ |\chi\rangle, \end{pmatrix} \tag{4}$$

la cual conduce a la siguientes ecuaciones acopladas

$$(E - m)|\phi\rangle = \sigma_3 \cdot (\hat{p}_z + im\omega\hat{z})\,|\chi\rangle, \tag{5a}$$
$$(E + m)|\chi\rangle = \sigma_3 \cdot (\hat{p}_z - im\omega\hat{z})\,|\phi\rangle. \tag{5b}$$

Substituyendo (5a) en (5b), y viceversa, obtenemos que

$$\left(\hat{p}_z^2 + (m\omega)^2\hat{z}^2\right)|\psi\rangle = \left((E^2 - m^2)\mathbb{I} + m\omega\beta\right)|\psi\rangle, \tag{6}$$

donde se ha tenido en cuenta las relaciones de conmutación entre los operadores $\hat{p}_z$ y $\hat{z}$, siendo $\mathbb{I}$ la matriz identidad 4×4 y β la matriz de Dirac γ^0. La anterior ecuación, mediante la siguiente reparametrización [5]

$$\hat{\zeta} = (m\omega)^{\frac{1}{2}}\hat{z}, \tag{7a}$$
$$\hat{p}_\zeta = (m\omega)^{-\frac{1}{2}}\hat{p}_z, \tag{7b}$$

se puede reescribir como

$$\left(\hat{p}_\zeta^2 + \hat{\zeta}^2\right)|\psi\rangle = \eta_\pm|\psi\rangle, \tag{8}$$

donde

$$\eta_\pm = \frac{E^2 - m^2}{m\omega} \pm 1. \tag{9}$$

Es de notarse que las ecuaciones que se obtienen para los estados de energía positiva $|\phi\rangle$ y negativa $|\chi\rangle$ tienen la forma de la de un oscilador armónico, por lo que es posible introducir los operadores escalera ascendente (creación) y descendente (destrucción) dados, respectivamente, por

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\zeta} - i\hat{p}_\zeta\right), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\zeta} + i\hat{p}_\zeta\right), \tag{10}$$

con el fin de encontrar los valores propios del sistema. De esta forma, usando estos operadores, las ecuaciones (5a) y (5b) toman la forma

$$|\phi\rangle = i\frac{\sqrt{2m\omega}}{E - m}\sigma_3\hat{a}^\dagger|\chi\rangle, \tag{11a}$$
$$|\chi\rangle = -i\frac{\sqrt{2m\omega}}{E + m}\sigma_3\hat{a}|\phi\rangle. \tag{11b}$$

De nuevo, substituyendo (11a) en (11b) y viceversa, se obtiene que los estados de energía positiva satisfacen

$$|\phi\rangle = \frac{2m\omega}{E_n^2 - m^2}\hat{N}|\phi\rangle, \tag{12}$$

mientras que los de energía negativa satifacen

$$|\chi\rangle = \frac{2m\omega}{E_{n'+1}^2 - m^2}(\hat{N} + 1)|\chi\rangle, \tag{13}$$

siendo $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ el operador de número de ocupación de los estados. A partir de estas dos últimas expresiones es posible deducir el espectro de energía, si se tiene en cuenta que el operador número determina el valor del nivel de energía donde se encuentra la partícula o la antipartícula, es decir:

- De (11a), el espectro de energía para los fermiones es:

$$E_n^2 = 2nm\omega + m^2. \tag{14}$$

- De (11b), el espectro de energía para los antifermiones es:

$$E_{n'+1}^2 = 2(n' + 1)m\omega + m^2. \tag{15}$$

Debido a que estamos considerando un mismo sistema físico es necesario imponer la siguiente restricción sobre los números cuánticos que caracterizan los dos anteriores espectros, es decir

$$n' = n - 1, \qquad \text{con } n \neq 0, \tag{16}$$

por lo que el espectro total puede escribirse de una forma compacta como [11]:

$$E_n = \pm\left(2\,|n|\,m\omega + m^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{con } n \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

El signo superior se escoje para los valores $n \geq 0$, mientras que el inferior para $n < 0$ [11], por lo tanto $E_{-n} = -E_n$ (para $n \neq 0$), es decir los números cuánticos negativos corresponden a los estados de energía negativa. Se observa que el estado de menor energía positiva corresponde al estado con $n = 0$, cuyo valor de energía es m, mientras que el estado con mayor energía negativa corresponde al estado con $n = -1$, cuyo valor de energía es $-\left(2m\omega + m^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Se observa que si $\omega \ll m$, entonces la diferencia de energía entre los estados ϕ_0 y χ_{-1} es $\Delta E = 2m+\omega$. Si $\omega = 0$, es decir el potencial armónico se anula en (2), entonces $\Delta E = 2m$, con lo que se recupera el resultado bien conocido descrito por la ecuación de Dirac para el caso libre.

Teniendo en cuenta lo anterior, los estados del sistema se escriben como

$$|\psi_n\rangle = \begin{pmatrix} |\phi_n\rangle \\ |\chi_n\rangle \end{pmatrix}, \tag{18}$$

donde el signo del número cuántico, $n \in \mathbb{Z}$, está directamente asociado a los estados de energía positiva o negativa. A partir de (11b) es posible escribir los estados de energía negativa en terminos de los estados de energía positiva, con lo cual

$$|\psi_n\rangle = \begin{pmatrix} |\phi_n\rangle \\ -i\frac{\sqrt{2m\omega}}{E+m}\sigma_3\hat{a}|\phi_n\rangle \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Aplicando el operador N sobre un estado del sistema $|\psi_n\rangle$, se obtiene que

$$\hat{N}|\psi_n\rangle = \begin{pmatrix} |n|\,|\phi_n\rangle \\ (|n|-1)|\chi_n\rangle \end{pmatrix}, \tag{20}$$

donde se ha tenido en cuenta tanto la relación (11b), así como las propiedades de los operadores creación y destrucción, y adicionalmente se ha supuesto que el estado $|\phi_n\rangle$ tiene un número de ocupación $|n|$. Por lo anterior, el espinor inferior $|\chi_n\rangle$ tiene asociado el número de ocupación $|n|-1$. Con lo anterior es posible escribir los estados $|\phi_n\rangle$ y $|\chi_n\rangle$ como

$$|\phi_n\rangle = |n\rangle\xi^1_n, \tag{21a}$$
$$|\chi_n\rangle = |n-1\rangle\xi^2_n, \tag{21b}$$

siendo $\xi^{1,2}_n$ los espinores de dos componentes y $|n\rangle$ representando un estado con número de ocupación $|n|$. En consecuencia, los estados del sistema se reescriben como

$$|\psi_n\rangle = \begin{pmatrix} |n\rangle\xi^1_n \\ |n-1\rangle\xi^2_n \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Los operadores creación $\hat{a}^\dagger$ y destrucción $\hat{a}$ actúan en estos espinores como ($\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{|n|+1}\,|n+1\rangle$, $\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{|n|}\,|n-1\rangle$)

$$\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{|n|+1}\,|n+1\rangle\xi^1_{n+1} \\ \sqrt{|n|}\,|n\rangle\xi^2_{n+1} \end{pmatrix}, \text{ para } n \neq -1, \tag{23a}$$

$$\hat{a}|\psi_n\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{|n|}\,|n-1\rangle\xi^1_{n-1} \\ \sqrt{|n-1|}\,|n-2\rangle\xi^2_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ para } n \neq 0, \tag{23b}$$

mientras que para los estados $|\psi_0\rangle$ y $|\psi_{-1}\rangle$, estados con $n = 0, -1$ respectivamente, se puede ver que los operadores actúan según

$$\hat{a}|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}(1-\beta)\,|\psi_{-1}\rangle, \tag{24a}$$
$$\hat{a}^\dagger|\psi_{-1}\rangle = \sqrt{2}|\psi_0\rangle. \tag{24b}$$

En la figura 1 se representa esquemáticamente la acción de los operadores creación y destrucción sobre los estados de energía positiva y negativa. Se observa que al aplicar el operador destrucción sobre el estado $|\phi_0\rangle$, es decir el estado de menor energía positiva, no lo aniquila, sino que el efecto es mandarlo al estado $|\phi_{-1}\rangle$, es decir al estado menos negativo en energía. Asi mismo, el efecto de aplicar el operador creación sobre el estado $|\phi_{-1}\rangle$ no lo aniquila, sino que lo manda al estado $|\phi_0\rangle$. De esta manera, vemos que la aparición de los estados de energía negativa genera el problema usual de la teoría de Dirac: ya que no existe un estado de mínima energía, es posible obtener de este sistema una cantidad infinita de energía. Para solucionar este inconventiente es necesario introducir la imagen de mar de Dirac para el oscilador de Dirac, lo cual se realizará en el proceso de cuantización.

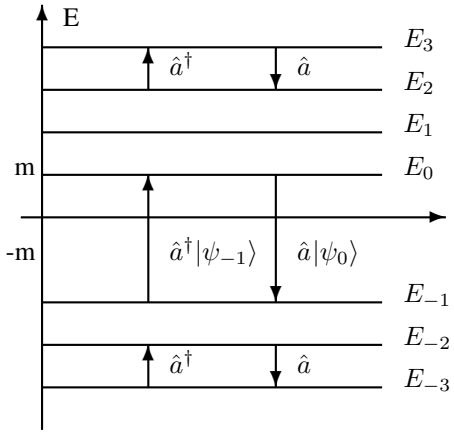

Fig. 1: Espectro de energías del oscilador de Dirac unidimensional y acción de los operadores escalera en algunos estados del sistema.

Una vez que se ha calculado el espectro, procedemos a obtener las funciones de onda. Reemplazando la expresión

(3) en (8), obtenemos la siguiente ecuación diferencial para la función de onda asociada al biespinor $|\phi\rangle$:

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} + \left(\eta_+ - \zeta^2\right)\right]\phi(\zeta) = 0, \tag{25}$$

donde se ha usado la representación de coordenadas de la función de onda dada por $\phi(\zeta) = \langle\zeta|\phi\rangle$. La ecuación diferencial (25) corresponde a la de un oscilador armónico relativista, cuya solución tiene la forma [11]:

$$\phi_n(\zeta) = N_{|n|}H_{|n|}(\zeta)e^{-\frac{\zeta^2}{2}}\xi_n^1. \tag{26}$$

De igual forma la solución a la ecuación diferencial asociada a la función de onda $\chi_n(\zeta) = \langle\zeta|\chi_n\rangle$ tiene la forma:

$$\chi_n(\zeta) = N_{|n|-1}H_{|n|-1}(\zeta)e^{-\frac{\zeta^2}{2}}\xi_n^2, \tag{27}$$

lo cual se justifica debido a que la expresión (21) implica para $|\chi_n\rangle$ que el número cuántico de ocupación n está disminuido en una unidad. En las dos anteriores soluciones $H_n(\zeta)$ representa los polinomios de Hermite. Ahora bien, es posible establecer una relación entre los espinores ξ_n^1 y ξ_n^2, mediante el uso de la ec. (11b), de las definiciones(21) y teniendo en cuenta las propiedades de los operadores creación y destrucción. La relación que se obtiene entre ellos es:

$$\xi_n^2 = -i\sqrt{\frac{E_n - m}{E_n + m}}\sigma_3\,\xi_n^1 \tag{28}$$

Mediante la normalización de los estados (3), teniendo en cuenta la anterior expresión, se obtiene [25, 26]:

$$\xi_n^1 = \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{E_n+m}{2E_n}}\\ 0\end{pmatrix}, \tag{29a}$$

$$\xi_n^2 = \begin{pmatrix}-i\sqrt{\frac{E_n-m}{2E_n}}\\ 0\end{pmatrix}. \tag{29b}$$

Teniendo en cuenta la forma del biespinor ξ_n^2, se observa que para el caso $n = 0$ este biespinor se anula, lo cual implica $|\chi_0\rangle \equiv 0$. Así, en general, la solución de la ecuación del oscilador de Dirac unidimensional está dada por [11, 15]:

$$\psi_n(z,t) = \sqrt{m\omega}\begin{pmatrix}\phi_n(z)\xi_n^1\\ \chi_n(z)\xi_n^2\end{pmatrix}e^{-iE_nt}, \tag{30}$$

donde se ha realizado la normalización de las funciones de onda, cumpliéndose que $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Finalmente escribimos la ecuación (2) de forma explícitamente covariante [5, 10]

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m + \sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\psi = 0, \tag{31}$$

con $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ y el tensor de esfuerzo asociado con la interacción dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{32}$$

donde hemos definido el cuadripotencial asociado con la interacción como

$$A_\mu = \frac{1}{4}\left(2(u\cdot x)x_\mu - x^2u_\mu\right). \tag{33}$$

El cuadrivector $u_\mu = (m\omega, \vec{0})$ corresponde a un vector dependiente del marco de referencia. En [10] se ha propuesto un sistema físico que puede dar cabida a una interacción del tipo oscilador de Dirac: Se considera una esfera dielectrica cargada y se muestra que sobre una partícula neutra con momento magnetico anómalo, moviéndose dentro de tal esfera, se produce una interacción de este tipo. Otro sistema físico que en el que se puede presentar este tipo de interacción se presenta en [27].

3. Cuantización canónica del oscilador de Dirac

Inicialmente definimos la densidad lagrangiana del sistema dada por

$$\mathcal{L} = \bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi\,F_{\mu\nu}, \tag{34}$$

la cual conduce mediante la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange a la ecuación de movimiento para el campo del oscilador de Dirac ψ dada por (31). Puesto que esta densidad lagrangiana depende explícitamente de la coordenada x, no es posible determinar el tensor de energía-momentum del sistema [28]. Sin embargo, se puede encontrar la densidad hamiltoniana, la cual está dada por

$$\mathcal{H} = \psi^\dagger(-i\alpha_3\cdot(\partial_z + m\omega\beta z) + \beta m)\psi. \tag{35}$$

Para proceder con la cuantización es necesario imponer las siguientes relaciones de conmutación del tipo Jordan-Wigner a los campos fermiónicos [29]

$$\left\{\hat\psi_\alpha(z,t), \hat\psi_\beta^\dagger(z',t)\right\} = \delta_{\alpha\beta}\delta(z-z'), \tag{36}$$

con lo cual se obtiene que el operador Hamiltoniano del campo del oscilador de Dirac ψ es

$$\hat H = \int dz\,\hat\psi^\dagger(-i\alpha_3\cdot(\partial_z + m\omega\beta z) + \beta m)\hat\psi. \tag{37}$$

La ecuación de Heisenberg para el campo ψ está dada por $\dot{\hat\psi}(z,t) = -i[\hat\psi(z,t), \hat H]$ [29], con lo cual se obtiene que la ecuación de movimiento del operador de campo del oscilador de Dirac es

$$i\dot{\hat\psi}(z,t) = (-i\alpha_3\cdot(\partial_z + m\omega\beta z) + \beta m)\,\hat\psi(z,t). \tag{38}$$

Ahora, como es usual en la Teoría de Campos Cuánticos [29], se expande el operador de campo en la base definida por las funciones de onda del oscilador de Dirac (30), teniendo en cuenta que los polinomios de Hermite representan la base para la expansión en series ortogonales y además que $n \in \mathbb{Z}$. De esta forma, la expansión en serie de Fourier del operador de campo se escribe como

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(z,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{b}_n \psi_n(z,t) e^{-iE_n t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{b}_n u_n(z) e^{-iE_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_{-n} \nu_n(z) e^{iE_n t} \\ &= \hat{\psi}_+(z,t) + \hat{\psi}_-(z,t), \end{aligned} \tag{39}$$

donde se han separado las contribuciones de energías positivas y negativas $\hat{\psi}_\pm(z,t)$ y se han definido los espinores $u_n(z)$ y $\nu_n(z)$ como

$$u_n(z) = \begin{pmatrix} \phi_n(z)\xi^1_n \\ \chi_n(z)\xi^2_n \end{pmatrix}, \; \nu_n(z) = \begin{pmatrix} \phi_{-n}(z)\xi^1_{-n} \\ \chi_{-n}(z)\xi^1_{-n} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Haciendo uso de las relaciones de conmutación (36), se puede verificar que los operadores de creación $\hat{b}^\dagger_n$ y destrucción $\hat{b}_n$ de partículas de energías positivas y negativas, satisfacen la relación de conmutación [29]:

$$\left\{\hat{b}_n, \hat{b}^\dagger_m\right\} = \delta_{n,m} \tag{41}$$

Teniendo en cuenta esta expansión, junto con las propiedades de los polinomios de Hermite, encontramos que el operador Hamiltoniano se escribe como [29]:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \hat{b}^\dagger_n \hat{b}_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n \hat{b}^\dagger_n \hat{b}_n - \sum_{n=1}^{\infty} E_n \hat{b}^\dagger_{-n} \hat{b}_{-n} \end{aligned} \tag{42}$$

Debido a que es posible crear partículas con energías negativas, el anterior operador Hamiltoniano presenta el problema de que su valor propio puede tomar valores negativos sin ninguna restricción. Para solucionar este problema, tomamos la imagen del mar de Dirac para el oscilador de Dirac, con lo cual imponemos que todos los estados de energía negativa estén ocupados por partículas de energía negativa, y además a tal configuración la denominamos estado de vacío $|0\rangle$ y lo escribimos como [30]:

$$|0\rangle = \prod_n \hat{b}^\dagger_{-n} |0_D\rangle, \tag{43}$$

donde $|0_D\rangle$ es el estado de vacío de Dirac caracterizado por no estar ocupado por fermiones con energía positiva ni negativa. Se observa que al aplicar el operador creación de partícula de energía negativa $\hat{b}^\dagger_{-m}|0\rangle$ sobre el estado de vacío $|0\rangle$, se cumple que:

$$\hat{b}^\dagger_{-m}|0\rangle = \prod_n \hat{b}^\dagger_{-m}\hat{b}^\dagger_{-n}|0_D\rangle = 0, \tag{44}$$

dado que no es posible crear un nuevo fermión con energía negativa puesto que todos los estados están ocupados, aunque sí sería posible destruirlo dando lugar a un agujero en este mar, que correspondería a una antipartícula con energía negativa. Usando la relación de de conmutación en (42), se encuentra que

$$\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \hat{b}^\dagger_n \hat{b}_n + \sum_{n=1}^{\infty} E_n (\hat{b}_{-n}\hat{b}^\dagger_{-n} - 1), \tag{45}$$

con lo cual el operador Hamiltoniano, sin tener en cuenta la energía divergente del vacío $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$, se escribe como [29]:

$$\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \hat{b}^\dagger_n \hat{b}_n + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \hat{b}_{-n}\hat{b}^\dagger_{-n}. \tag{46}$$

Ahora se observa que este operador no posee el problema anterior, ya que es definido positivo. Finalmente, para evitar confusiones, se realiza una transformación canónica sobre los operadores de partículas con energías negativas [29]:

$$\hat{b}_{-n} = \hat{c}^\dagger_n, \tag{47a}$$

$$\hat{b}^\dagger_{-n} = \hat{c}_n, \tag{47b}$$

$$\left\{\hat{c}_n, \hat{c}^\dagger_m\right\} = \delta_{n,m}, \tag{47c}$$

cuyo significado corresponde a hacer que los operadores de destrucción de partículas de mar de Dirac, se puedan entender como operadores de creación de antipartículas. Con lo anterior, la expansión en serie de Fourier del operador de campo del oscilador de Dirac dada por (39), se puede escribir como

$$\hat{\psi}(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{b}_n u_n(z) e^{-iE_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}^\dagger_n v_n(z) e^{iE_n t}. \tag{48}$$

Con esta expansión es posible determinar otras cantidades físicas relevantes [29]. El operador de cuadricorriente, $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, está dado por

$$\begin{aligned} j^\mu(z,t) =& q \sum_{k,n=0}^{\infty} \hat{b}^\dagger_n \hat{b}_k \, \bar{u}_n(z)\gamma^\mu u_n(z) \, e^{i(E_n - E_k)t} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n \hat{c}^\dagger_k \, \bar{v}_n(z)\gamma^\mu v_n(z) \, e^{-i(E_n - E_k)t}, \end{aligned} \tag{49}$$

con lo que el operador de carga, $\hat{Q} = e\int dz\,\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}$, se escribe como

$$\hat{Q} = e\sum_{n=0}^{\infty}\hat{b}_n^\dagger\hat{b}_n - \hat{c}_n^\dagger\hat{c}_n, \tag{50}$$

donde se ha sustraído la carga inobservable del vacío. De igual forma el operador de momentum $\hat{P} = -i\int dz\,\hat{\psi}^\dagger\nabla\hat{\psi}$ también se puede escribir explícitamente [29].

4. Propagador de Feynman

Ahora calculamos el propagador de Feynman para el campo del oscilador de Dirac [29, 31]:

$$i\mathcal{S}^F_{\alpha\beta}(z-y) = \langle 0|\hat{T}\left(\hat{\psi}_\alpha(z)\hat{\bar{\psi}}_\beta(y)\right)|0\rangle. \tag{51}$$

Teniendo en cuenta la definición del operador de ordenamiento temporal, obtenemos:

$$\begin{aligned} i\mathcal{S}^F_{\alpha\beta}(z-y) =& \Theta(z_0-y_0)\sum_{n=0}^{\infty}u_{\alpha,n}(z)\bar{u}_{\beta,n}(z)e^{-iE_n(z_0-y_0)} \\ &- \Theta(y_0-z_0)\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{\alpha,n}(z)\bar{\nu}_{\beta,n}(z)e^{iE_n(z_0-y_0)}. \end{aligned} \tag{52}$$

El propósito es ahora obtener el propagador de Feynman en el espacio de momentos. Para esto tenemos en cuenta que la transformada de Fourier de los polinomios de Hermite está dada por

$$\mathfrak{F}\left\{e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)\right\} = (-i)^n e^{-\frac{k^2}{2}}H_n(k), \tag{53}$$

junto con el hecho de que la integral de contorno para los valores propios de la energía se puede escribir como [15]

$$\begin{aligned} i\oint_C\frac{dp_0}{2\pi}\,\frac{e^{-ip_0(z_0-y_0)}}{p_0^2-p_n^2} =& \Theta(z_0-y_0)\frac{e^{-iE_n(z_0-y_0)}}{2E_n} \\ &+ \Theta(y_0-z_0)\frac{e^{iE_n(z_0-y_0)}}{2E_n}. \end{aligned} \tag{54}$$

Con lo anterior encontramos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^F_{\alpha\beta}(z-y) = \oint_C\frac{dp_0\,d\mathbf{p}_z\,d\mathbf{p}_y}{(2\pi)^3}\times \\ \mathcal{S}^F_{\alpha\beta}(p_0,p_z,p_y)e^{-i(p_z z+p_y y)}, \end{aligned} \tag{55}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^F_{\alpha\beta}(p_0,p_z,p_y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p_0^2-p_n^2}(u_{\alpha,n}(p_z)\bar{u}_{\beta,n}(p_y) - \\ v_{\alpha,n-1}(p_z)\bar{v}_{\beta,n-1}(p_y)). \end{aligned} \tag{56}$$

La forma obtenida para el propagador de Feynman es la misma que es presentada en [15], aunque con la diferencia que allí se calcula la integral de camino para el oscilador unidimensional usando una representación de las matrices de Dirac distinta.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos realizado la cuantización canónica del oscilador de Dirac unidimensional, lo cual fue posible debido a que las soluciones de este sistema no presentan la paradoja de Klein. Sin el cumplimiento de este hecho, la cuantización hubiera sido imposible, puesto que se hubiera tenido la posibilidad de mezcla entre estados con energías positivas y negativas. Para realizar esta cuantización hemos procedido como si el campo del oscilador de Dirac fuera un campo libre. Sin embargo, esto implica diferencias con el caso de la cuantización de un campo libre. En primer lugar, el oscilador de Dirac se trata de un sistema que presenta interacciones, por lo que se generan estados ligados, con números cuánticos determinados. En este caso los operadores de campos crean y aniquilan fermiones con valores de energía determinados, en contraste con lo que pasa en el caso del campo libre, donde los estados tienen momentum bien determinado. Además, para este caso el operador de momentum depende explícitamente del tiempo, por lo que los fermiones que se crean no poseen momentum determinado. Durante el procedimiento de cuantización se encontró que es imposible determinar el tensor de energía-momentum, debido a que existe una dependencia explícita con las coordenadas espaciales en la densidad lagrangiana. Sin embargo este problema se podría solucionar introduciendo un campo adicional en el sistema que exprese la interacción. Hemos calculado también el propagador de Feynman para el oscilador de Dirac de una forma consistente con el presentado en la literatura en un tratamiento funcional.

6. Agradecimientos

C. Quimbay agradece a la División de Investigaciones de la Sede Bogotá de la Universidad Nacional de Colombia por el apoyo recibido a través del proyecto de investigación "Propagación y oscilaciones de neutrinos a temperatura y densidad finita" para la realización de este trabajo.

Referencias

[1] Itô, D. y Mori K. *An example of dynamical systems with linear trajectory (Il Nuovo Cimento A)*. **51, 4 (Octubre, 1967)**, p. 1119.

[2] Cook P. A. *Relativistic harmonic oscillators with intrinsic spin structure (Lettere al Nuovo Cimento)*. **1, 10 (Marzo, 1971)**, p. 149.

[3] Moshinski M. y Szczepaniak A.*The Dirac Oscillator (Journal of Physics A: Mathematical and General)*. **22, 1989**, p. L817.

[4] Moreno M. y Zentella A. *Covariance, CPT and the Foldy-Wouthuysen transformation for the Dirac oscillator (Journal of Physics A: Mathematical and General)*. **22, 1989**, p. L821.

[5] Benítez J. , Martínez y Romero R. P. , Núñez-Yépez H. N. y Salas-Brito A. L. *Solution and hidden supersimmetry of a Dirac oscillator (Physical Review Letters)*. **64, 14 (Abril, 1990)**, p. 1643.

[6] Quesne C. y Moshinsky M. *Symmetry Lie algebra of the Dirac oscillator.(Journal of Physics A: Mathematical and General)*. **22, 1990**, p. 2263.

[7] Domínguez-Adame F. y González M. A.*Solvable linear potentials in the Dirac equation (Europhysics Letters)*. **13, 3 (Octubre, 1990)**, p. 193.

[8] Domínguez-Adame F. *A relativistic interaction without Klein paradox. (Physics Letters A)*. **162, 1992**, p. 18.

[9] Martínez y Romero R. P. y Salas-Brito A. L. *Conformal invariance in a Dirac oscillator (Journal of Mathematical Physics)*. **33, 5 (Mayo, 1992)**, p. 1831.

[10] Martínez y Romero R. P. y Núñez-Yépez H. N. *Relativistic quantum mechanics of a Dirac oscillator (European Journal of Physics)*. **16, 3 (Mayo, 1995)**, p. 135.

[11] Szmytkowski R. y Gruchowski M. *Completeness of the Dirac oscillator eigenfunctions (Journal of Physics A: Mathematical and General)*. **34, 2001**, p. 4991.

[12] Alhaidari A. D. *The Dirac-Oscillator Green's Function (International Journal of Theoretical Physics)*. **43, 4 (Abril, 2004)**, p. 939.

[13] Quesne C. y Tkachuk V. M. *Dirac oscillator with nonzero minimal uncertainty in position (Journal of Physics A: Mathematical and General)*. **38, 8 (Febrero, 2005)**, p. 1747.

[14] Quesne C. y Tkachuk V. M. *Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length and application to the (1 + 1)-dimensional Dirac oscillator (Journal of Physics A: Mathematical and General)*. **39, 34 (Agosto, 2006)**, p. 10909.

[15] Rekioua R. y Boudjedaa T. *Path integral for one-dimensional Dirac oscillator (The European Physical Journal C)*. **49, 2007**, p. 1091.

[16] Rodrigues R. de Lima. *On the Dirac oscillator (Physics Letters A)*. **372, 15 (Abril, 2008)**, p. 2587.

[17] Sadurní E., Torres J. M. y Seligman T. H. *Dynamics of a Dirac oscillator coupled to an external field: A new class of solvable problems*. Disponible en: ArXiv:0902.1476 [quant-ph], http://arxiv.org/abs/0902.1476v2.

[18] Mandal V. P. y Verma S. *Dynamics of a Dirac oscillator coupled to an external field: A new class of solvable problems*. Disponible en: ArXiv:0907.4544 [hep-th], http://arxiv.org/abs/hep-th/0907.4544.

[19] Moshinski M. y Loyola G. *Barut equation for the particle-antiparticle system with a Dirac oscillator interaction (Foundations of physics)*. **23, 2 (Febrero, 1993)**, p. 197.

[20] Moshinski M. y Smirnov Y. *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*. Amsterdam, Harwood Academic Press, 1996.

[21] Villalba V. *Exact solution of the two-dimensional Dirac oscillator (Physics Review A)*. **49, 1 (Enero, 1994)**, p. 586.

[22] Ju G-X. y Ren Z. *Generalized Harmonic Oscillator and the Schrödinger Equation with Position-Dependent Mass (Communications in Theoretical Physics)*. **51, 5 (Mayo, 2009)**, p. 797.

[23] Pacheco M. H. , Landim R. R. y Almeida C. A. S. *One-dimensional Dirac oscillator in a thermal bath (Physics Letters A)*. **311, 2003**, p. 93.

[24] Berestetskii V. B. , Lifshitz E. M. y Pitavskii L. P. *Quantum Electrodynamics (Course of Theoretical Physics; No. 4)*. Segunda Edición. Moscú: Pergamon Press, 1982. p. 118.

[25] Bermudez A. , Martín-Delgado M. A. y Solano E. *Exact mapping of the 2+1 Dirac oscillator onto the Jaynes-Cummings model (Physical Review A): Ion-trap experimental proposal*. **76, 2007**, p. 041801(R).

[26] Rozmej R. y Arvieu R. *The Dirac Oscillator: A relativistic version of the Jaynes-Cummings model*. Disponible en: ArXiv:9903073 [quant-ph], http://arxiv.org/abs/quant-ph/9903073v1.

[27] Moshinski M. y Sadurni E. *Alternative method for determining the Feynman propagator of a relativistic quantum mechanical problem (Revista Mexicana de Física)*. **54, 3 (Diciembre, 2008)**, p. 92.

[28] Ryder L. H. *Quantum Field Theory*. Segunda Edición. Cambridge, Cambridge University Press, 1996. p. 81.

[29] Greiner W. , Reinhardt J. *Field Quantization (Theoretical Physics: No. 5)*. Berlín Heidelberg, Springer-Verlag, 1996. p. 117.

[30] Colin S. y Struyve W. *A Dirac sea pilot-wave model for quantum field theory (Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical)*. **40, 26 (Junio, 2007)**, p. 7309.

[31] Greiner W. y Reinhardt J. *Quantum Electrodynamics (Theoretical Physics. No. 6)*. Tercera Edición. Berlín Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. p. 117.