



Ángulo de rodadura como función de la velocidad para un suelo y una esfera viscoelásticos

Rolling angle as a function of velocity for viscoelastics ground and body

W. F. Oquendo ^{a1}, G. Villalobos ^a, J. D. Muñoz ^a.

^a Grupo Simulación de Sistemas Físicos, Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia.

Recibido 09.10.09; Aceptado 27.05.10; Publicado en línea 31.08.10.

Resumen

El ángulo de rodadura representa la asimetría en la distribución de las fuerzas disipativas cuando una partícula rueda sobre una superficie. En simulaciones de medios granulares es tradicional definir un ángulo de rodadura constante, y han sido pocos los trabajos que han explorado la dependencia del ángulo de rodadura con otras variables dinámicas relevantes como la velocidad relativa entre las superficies y el módulo de Young. En este trabajo, tanto el suelo como la esfera que rueda sobre él se modelan por medio de Dinámica Molecular, y se encuentra que el ángulo de rodadura surge naturalmente como efecto de las interacciones disipativas y asimétricas entre el suelo y la esfera. Adicionalmente, se explora la dependencia de este ángulo como función de la velocidad relativa y de la dureza del suelo. Se obtiene que para velocidades crecientes el ángulo de rodadura aumenta, pero para velocidades muy grandes éste disminuye.

Palabras Clave: Ángulo de rodadura, Cuerpos Viscoelásticos, Dinámica Molecular, Métodos de Simulación, Física Computacional.

Abstract

The rolling angle represents the non-symmetric distribution of the dissipative forces when a particle rolls over a surface. In granular media simulations, it is traditional to define the rolling angle as a constant, and few works have explored the rolling angle dependence in terms of other relevant dynamical variables such as the relative velocity between surfaces and the Young modulus. In this work, both the ground as the sphere rolling over it are modeled by the Molecular Dynamics method, and it is found that the rolling angle naturally appears as an emergent effect of the dissipative and non-symmetric interactions between the ground and the sphere. Additionally, the dependence of the rolling angle in terms of the relative velocity and the ground hardness are explored. It is found that for increasing relative velocities the rolling angle increases, but for large relative velocities this angle decreases.

Keywords: Rolling angle, Viscoelastic bodies, Molecular Dynamics, Simulation Method, Computational Physics.

PACS: 02.70.-c, 45.10.-b, 46.15.-x, 82.20.Wt, 91.60.Ba, 46.05.+b, 46.35.+z.

©2009. Revista Colombiana de Física. Todos los derechos reservados.

1. Introducción

El fenómeno de la rodadura de cuerpos deformables ha escapado de una descripción teórica completa durante largo tiempo. La complejidad asociada a las deformaciones no uniformes lleva a que solamente se hayan logrado algunos resultados parciales para casos especiales [1]. Los modelos actuales de rodadura incluyen un coeficiente de fricción de rodadura o, equivalentemente, un ángulo de rodadura (θ_r), para representar la asimetría en la deformación del cuerpo que resulta en una oposición neta a la rodadura [2], [3], [4], en forma similar a la fuerza de fricción que se opone al rozamiento en deslizamiento, figura 1. Es común tomar el ángulo de rodadura como una constante, pero en general se espera que esta variable emergente de tipo dinámico dependa de las constantes mecánicas de los materiales y de sus estados de movimiento relativos. En este trabajo se explora la dependencia del ángulo de rodadura en términos de la velocidad relativa de los cuerpos y de la dureza o módulo de Young. El sistema modelo será un disco duro rodando sobre un suelo deformable. En este trabajo se propone usar la Dinámica Molecular para modelar el suelo como una alternativa a los Elementos Finitos [5], dado que la aparición de otro tipo de elemento discontinuo con el suelo (el disco) y la situación dinámica (rodadura y traslación) representa una complejidad muy alta para la formulación de Elementos Finitos, mientras que es casi natural con Dinámica Molecular. El algoritmo de integración usado fue Lep-Frog [6], [7], [8]. El sistema tiene condiciones de frontera periódicas en la dirección horizontal.

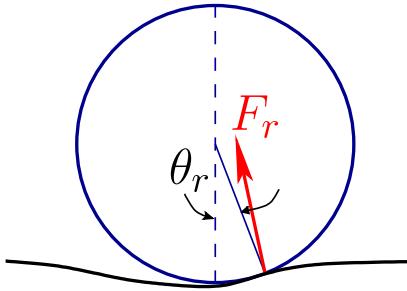


Figura 1: Definición de ángulo de rodadura θ_r para una esfera dura que rueda, en sentido de las manecillas del reloj, sobre un piso deformable. A diferencia de un suelo no deformable, en que la fuerza de reacción del suelo se aplica directamente bajo el centro de gravedad, para un suelo deformable la fuerza se encuentra ligeramente desplazada de esta dirección en un ángulo θ_r .

2 Modelo para el suelo viscoelástico

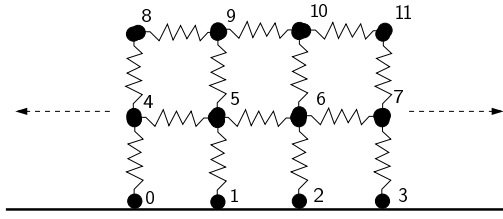


Figura 2: Configuración de la red de resortes para modelar el suelo. También se muestran los índices para el caso de $N = N_x N_y = 4 \times 3 = 12$ partículas.

El suelo se modeló como una red bidimensional de objetos puntuales, unidos por resortes idénticos con condiciones de frontera periódicas en la dirección horizontal, figura 2). Cada resorte se une a sus posibles cuatro vecinos por medio de una partícula. Sea $N = N_x N_y$ el número total de partículas, donde N_s representa el número total de partículas en la dirección s . Si la densidad del suelo se denota como ρ , la masa de cada una de las partículas de la malla es igual a:

$$m = \frac{\rho A}{N} = \rho \frac{(N_x - 1)(N_y - 1)}{N_x N_y} \Delta x \Delta y, \quad (1)$$

donde Δs es la resolución en el eje s . La constante de dureza k de estos resortes refleja la dureza del suelo (Módulo de Young). La variable l_0 representa la longitud natural de cada resorte. La fuerza sobre cada una de las partículas de la malla está compuesta por diferentes interacciones: La fuerza ejercida por los resortes que conectan con los primeros vecinos, la fuerza que hace el cuerpo externo y finalmente la fuerza viscosa general que actúa sobre los resortes y hace que el sistema se relaje. A continuación se presenta la definición de cada una de ellas.

2.1 Fuerzas elásticas entre las partículas

Para calcular la fuerza entre las partículas id y jd , se consideran sistemas de referencia relativos. Es decir, se considera la desviación de la partícula id respecto a su posición de equilibrio y la desviación de jd respecto a su propia posición de equilibrio. *En este trabajo, la vecindad de una partícula está formada únicamente por primeros vecinos.* La implementación de la fuerza elástica se dividió en dos componentes. Una a primer orden en la que las deformaciones en cada eje que se toman como independientes unas de otras, y una a segundo orden en la que se tiene en cuenta la deformación que tiene un resorte en una dirección debido a un movimiento del resorte vecino en la otra dirección. En lo que sigue, se define \vec{r}_s como la posición de la masa puntual s respecto a su propia

posición de equilibrio en la malla, mientras que \vec{R}_s representa su posición absoluta respecto al sistema de referencia del laboratorio.

2.1.1 Primer Orden

La fuerza elástica de primer orden que ejerce la masa jd sobre la masa id debida a la elongación del resorte que las une se define como:

$$\vec{F}_{j \rightarrow id} = -\vec{F}_{id \rightarrow jd} = -k(\vec{r}_{id} - \vec{r}_{jd}). \quad (2)$$

Esta expresión es equivalente a suponer que existe un resorte en dirección \hat{x} y otro en dirección \hat{y} y que éstos son independientes.

2.1.2 Segundo Orden

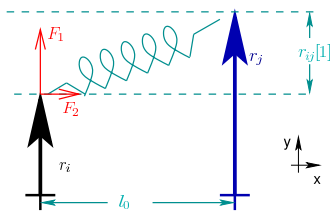


Figura 3: Las partículas i y j no tienen desplazamientos en la dirección horizontal. La diferencia entre sus componentes verticales produce una elongación del resorte con dos efectos sobre la partícula i . A primer orden una fuerza F_1 en la dirección y , y a segundo orden la fuerza F_2 en la dirección x positiva.

Una desviación de una partícula en la dirección vertical causará una elongación en la dirección horizontal de un resorte puesto verticalmente y viceversa. Esta elongación no está incluida en la fuerza a primer orden. Un ejemplo de este caso se muestra en la figura 3. Luego de realizar una expansión de la elongación sobre cada uno de los ejes teniendo como parámetro de la expansión a la cantidad $\Delta s/l_0 \ll 1$, se obtiene que la componente de segundo orden de la fuerza tiene la forma:

$$\vec{F}_{j \rightarrow id} = -\frac{k}{2l_0} \left(r_{ij,y}^2 \hat{i} + r_{ij,x}^2 \hat{j} \right), \quad (3)$$

donde $\vec{r}_i = (r_{i,x}, r_{i,y})$ y, además, $r_{ij,y} = (r_{ij,x}, r_{ij,y}) = (r_{i,x} - r_{j,x}, r_{i,y} - r_{j,y})$.

Las partículas que se encuentran en la primera fila (parte inferior) se consideran suficientemente alejadas de la superficie y se mantienen inmóviles. Las partículas de la parte superior serán las que interactúen con el cuerpo externo y ellas

transmitirán su estado de esfuerzo y movimiento a sus vecinos por medio de los resortes.

2.2 Fuerza viscosa

Sobre cada una de las partículas del suelo actuará una fuerza viscosa de la forma:

$$\vec{F}_{vis} = -m\gamma\vec{V}, \quad (4)$$

donde m es la masa de la partícula, \vec{V} su velocidad y γ una constante de amortiguamiento. Esta fuerza permite que la malla recupere su forma y/o llegue a un equilibrio dinámico y cinemático. El valor de la constante γ controla la velocidad de relajación.

3. Fuerza entre un cuerpo externo y el suelo

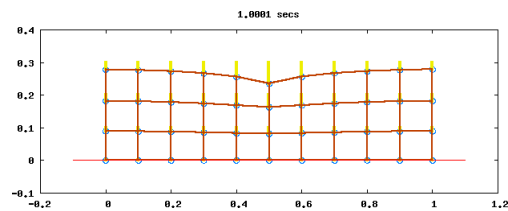


Figura 4: Deformación en el suelo debido a un peso colocado solamente sobre la partícula superior de la mitad.

La interacción entre el suelo (malla) y un cuerpo externo hará que el primero se deforme. Por ejemplo, si colocamos una pesa sobre una sola partícula de la capa superior, tendremos la deformación que se muestra en la figura 4. Para calcular la fuerza de interacción entre un cuerpo externo y las partículas de la malla, rodearemos cada una de estas partículas con una pequeña capa para simular un disco muy pequeño, lo que permite calcular una distancia de "interpentración" entre el cuerpo y cada partícula del suelo. Este radio es muy pequeño, del orden del décimo de l_0 . Para no crear efectos ficticios debidos a este "core", tenemos la restricción de que $l_0 \ll d$, donde d es un parámetro característico del tamaño del cuerpo. Para el caso de una esfera $d = \text{radio}$. Con este modelo de cómputo del contacto podemos definir dos tipos de interacciones básicas que serán suficientes para producir la rodadura: Una repulsión en la dirección normal (la dirección que une los centros), repulsión que no genera torque, y una fuerza de disipación viscosa tangencial que es proporcional a la velocidad relativa entre cada punto de la superficie del cuerpo y los puntos de la malla. Esta última fuerza sí genera torque. A continuación describiremos cada una de las interacciones mencionadas.

3.1 Modelo de fuerza normal entre el cuerpo esférico y el suelo

Sea \vec{R}_e la posición del centro de masa de la esfera. Si $\delta = R_e + R_i - |\vec{R}_e - \vec{R}_i|$ denota la interpenetración ficticia entre la esfera y la partícula i , donde R_e es el radio de la esfera y R_i el radio del “core” que rodea a la partícula del suelo, modelamos la fuerza repulsiva en dirección normal como:

$$\vec{F} = k\delta\hat{n} = k\delta\frac{\vec{R}_e - \vec{R}_i}{|\vec{R}_e - \vec{R}_i|}. \quad (5)$$

Esta fuerza no genera torque dado que está dirigida en dirección normal, en la dirección que une los centros de las partículas,

3.2 Modelo de fuerza tangencial y torque entre el cuerpo esférico y el suelo

Dado un vector normal \hat{n} , es posible calcular la velocidad relativa tangencial \vec{V}_t del punto de la superficie de la esfera que está en contacto con la partícula del suelo. Se puede demostrar que:

$$\vec{V}_t = \hat{n} \times (\vec{V} \times \hat{n}) + R\hat{n} \times \vec{\omega}, \quad (6)$$

donde \vec{V} es la velocidad traslacional del cuerpo, R es el radio de la esfera y $\vec{\omega}$ la velocidad angular del cuerpo. Inicialmente puede pensarse que en rodadura la velocidad mostrada arriba es cero, pero eso sólo ocurre si la superficie de contacto es un punto, no en casos mas realistas (como el presentado en este trabajo) en donde la superficie de contacto tiene extensión espacial. La fuerza en dirección tangencial que implementaremos será simplemente una fuerza viscosa de la forma:

$$\vec{F}_t = -\gamma_t M \vec{V}_t, \quad (7)$$

donde M es la masa del cuerpo y γ_t es una constante que mide la magnitud de la disipación. La fuerza (7) genera un torque de la forma:

$$\vec{\tau} = -R\hat{n} \times \vec{F}_t. \quad (8)$$

3.3 Ángulo de rodadura

El ángulo de rodadura θ_r representa la asimetría en la fuerza de reacción del suelo sobre el cuerpo. Por ejemplo, en el caso de una esfera sobre el suelo se espera que la deformación sea más suave que en el caso de un cuerpo más angulado, lo que es una directa consecuencia de la simetría de la esfera. Pero es de esperarse que la deformación cambie cuando la partícula rueda sobre la superficie, ya que las partículas del suelo que quedan atrás requieren un tiempo finito para recuperarse y por lo tanto no llegarán a su posición de equilibrio

tan rápidamente. Esto genera una curva de deformación que no es trivial, y representa la mayor dificultad para realizar un ataque teórico, dado que la forma de esta curva no es conocida. Por esta razón, la simulación puede dar indicios sobre lo que se debería esperar. Para calcular el ángulo de rodadura θ_r en cada tiempo se suma la fuerza total de reacción \vec{F}_T del suelo sobre la esfera. Adicionalmente, se suma también el torque total $\vec{\tau}_T = \tau_z \hat{z}$. Con estas magnitudes es posible calcular el coseno de θ_r de la forma:

$$\cos \theta_r = \frac{\sqrt{|\vec{F}_{R,y}|^2 R^2 (R^2 |\vec{F}_T|^2 - \tau_z^2) - F_{T,x} \tau_z R}}{R^2 |\vec{F}_T|^2}. \quad (9)$$

Por lo tanto, si se mantiene la velocidad de traslación constante el suelo ejercerá una fuerza de reacción sobre el suelo, que luego de un tiempo de relajación será una fuerza constante, y así se podrá medir el ángulo θ_r para esa velocidad.

4. Resultados

Para calcular la dependencia de θ_r con diferentes parámetros, se mantuvo constante la velocidad de traslación. Esto genera una velocidad angular compatible con la restricción de rodadura, y de la misma manera se genera una fuerza neta de reacción del suelo sobre el cuerpo. Esta fuerza está ligeramente trasladada respecto al centro, generando un torque neto, y la medida del corrimiento se calcula con el ángulo de rodadura, obtenido por la ecuación (9). Es de anotar que este corrimiento surge de manera natural, no se impone sobre el sistema.

4.1 Dependencia de θ_r con la velocidad de traslación

En este caso se varió la velocidad y se obtiene θ_r como función de este parámetro. Se espera que para pequeñas velocidades θ_r aumente a medida que la velocidad aumenta, dado que la superficie de contacto y por tanto la disipación aumentan, pero para velocidades muy grandes θ_r debe disminuir porque la superficie de contacto disminuye. Esto es precisamente lo que se observa en la figura 5. Las variaciones observadas en la parte final se deben a que la partícula va demasiado rápido y entonces la malla es muy pequeña y las condiciones de frontera periódica afectan los resultados.

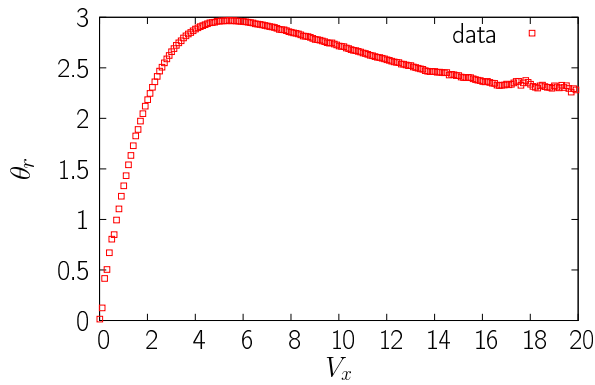


Figura 5: Ángulo de rodadura θ_r en función de la velocidad de traslación $V_x = R\omega$.

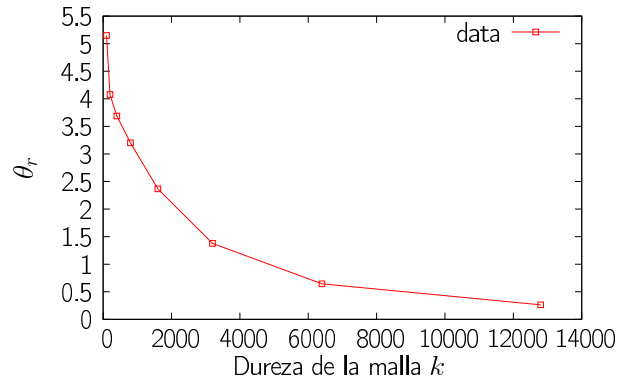


Figura 7: Ángulo de rodadura θ_r en función de k .

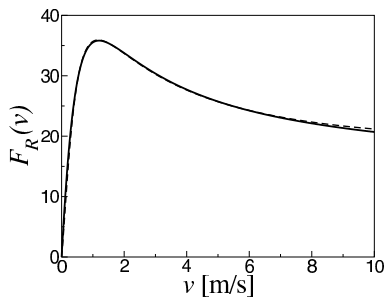


Figure 2. Rolling friction force $F_R(v)$. Full line: numerical solution, dashed line: approximative theory, Eqs. (11) and (12).

Figura 6: Fuerza de rodadura en función de la velocidad, reproducido de [1].

El resultado de la figura 5 se asemeja mucho a los resultados obtenidos por medio de una aproximación teórica que se realizó para una esfera dura que rueda sobre un plano inclinado [1], [9], [10], ver Figura 6.

4.2 Dependencia de θ_r con la dureza de los resortes del suelo

La figura 7 muestra la dependencia de θ_r con la dureza de los resortes del suelo k . Se observa que a medida que k crece θ_r disminuye, lo que se espera debido a que a mayor k se tienen menor superficie de contacto y menor asimetría de los esfuerzos sobre el cuerpo.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado que la modelación por Dinámica Molecular de un sólido permite estudiar diferentes respuestas cinemáticas y dinámicas y es una buena alternativa a métodos tradicionales. Se ilustró la metodología al simular la rodadura de un cuerpo esférico rígido sobre un plano deformable con interacciones viscoelásticas, estudiando la relación entre el ángulo de rodadura y diferentes variables dinámicas del modelo. A partir de los resultados, se observa que para reproducir la rodadura solamente se necesita de una fuerza tangencial viscosa (y su torque asociado). La ligadura de rodadura surge de manera natural. Adicionalmente, el método usado permite verificar directamente la hipótesis teórica de que la deformación superficial asimétrica es la causa precisamente de la asimetría en las fuerzas de reacción del suelo sobre el cuerpo, y por tanto de la aparición del ángulo de rodadura θ_r . Los resultados obtenidos permiten comprender los orígenes de la fuerza de rozamiento de rodadura desde un punto de vista micromecánico. El método propuesto en este trabajo permite simular situaciones dinámicas más fácilmente que con el método de Elementos Finitos. También es posible simular de manera natural materiales que están sometidos a cargas cíclicas debido a las condiciones de frontera periódicas. Más aún, cambiando ligeramente el modelo de fuerzas para los resortes es posible simular también deformaciones plásticas. La limitante más importante del método propuesto está relacionada con la eficiencia de la simulación. Es necesario encontrar un equilibrio entre el número de partículas a simular, la reproducción realista del material y el rendimiento total de la simulación. Otro futuro trabajo puede concentrarse en el estudio de la eficiencia del método comparada con elementos finitos para simular procesos cinemáticos como el mostrado. La metodología mostrada es fácilmente paralelizable usando librerías como MPI dado que los vecinos de cada partícula son conocidos desde el inicio.

Referencias

- [1] Brilliantov, N. V., T. Pöschel, T. Schwager and A. Zaikin. *Rolling friction and bistability of rolling motion*, en: Garcia-Rojo et al. [9]. Also in arXiv:cond-mat/0506255v1.
- [2] Hierrezuelo, J. and C. Carnero. *Phys. Educ.*, **30**, 1995, pp. 177-182.
- [3] Oquendo, W. F., J. D. Muñoz, and A. Lizcano. *Computer Physics Communications*, **180**, 2009. pp. 616-620.
- [4] Oquendo, W. F. *Simulación de la compresión edométrica de un material granular y determinación de la relación de vacíos*, Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2007.
- [5] Segerlind, L. *Applied Finite Element Analysis*, John Wiley And Sons, 1984.
- [6] Rapaport, D. C. *The Art of Molecular Dynamics Simulation*, 2^o ed., Cambridge, Cambridge University Press, 2004.
- [7] Frenkel, D. and B. Smith. *Understanding Molecular Simulations: From Algorithms to Applications*, 2^o ed., Academic Press, 2002.
- [8] Allen, M. P. and D. J. Tildesley. *Computer Simulation of Liquids*, Oxford, Oxford University Press, 1987.
- [9] Garcia-Rojo, R., H. J. Herrmann, and Mcnamara S., editors. *Powders and grains: Proceedings of the 5th International Conference on Micromechanics of Granular Media, Stuttgart, Germany*, Association pour L'Etude de la Micromécanique des Mileaux Granulaires, 2005.
- [10] Brilliantov, N. V. and T. Pöschel. *Europhys. Lett.*, **42**, 1998, pp. 511–516.