



Cálculo del máximo exponente de Lyapunov con Mathematica

Calculation of Largest Lyapunov Exponent with Mathematica

F. L. Dubeibe^{a*}.

^aFacultad de Ciencias Humanas y de la Educación, Escuela de Pedagogía y Bellas Artes,
Universidad de los Llanos, Villavicencio, Colombia

Recibido noviembre 1 de 2011; aceptado agosto 25 de 2013.

Resumen

Un indicador general de la presencia de caos en un sistema dinámico, es el máximo exponente de Lyapunov. Esta cantidad, da una medida de la tasa media de divergencia exponencial de órbitas cercanas. En este trabajo, se presenta de manera detallada y sencilla la implementación en el software Mathematica, del denominado método variacional para el cálculo del máximo exponente de Lyapunov. A diferencia de los trabajos previamente publicados, el código presentado se encuentra actualizado con las nuevas librerías, funciones y comandos incluidos en las versiones más recientes de Mathematica. Adicionalmente, se introduce una forma alternativa de cálculo, expresando el valor del exponente como un promedio sobre un conjunto de trayectorias.

Palabras clave: dinámica caótica, exponentes de Lyapunov, Mathematica.

Abstract

A general indicator of the presence of chaos in a dynamical system is the largest Lyapunov exponent. This quantity provides a measure of the mean exponential rate of divergence of nearby orbits. In this paper, we show how to implement the so-called variational method for calculating the largest Lyapunov exponent in Mathematica. Unlike previously published works, the code has been updated to incorporate the new features and functions included in the latest versions of Mathematica. Additionally, we use an alternative method to calculate the exponent, given as an average over an ensemble of trajectories.

Keywords: chaotic dynamics, Lyapunov exponents, Mathematica.

1. Introducción

Dada la interdisciplinariedad que han adquirido los sistemas dinámicos y la teoría del caos, sus técnicas y métodos se han difundido entre comunidades amplias de biólogos, economistas, sociólogos y en general, no expertos en programación. Esto ha generado una ola de trabajos en los que se implementan métodos de cálculo

de cantidades esenciales para la determinación de la dinámica (regular o caótica) de dichos sistemas (ver *e.g.* [1,2,3]). Una cantidad particular de interés, es el máximo exponente de Lyapunov, el cual da una medida de la tasa exponencial media de la divergencia o convergencia de órbitas cercanas. Desafortunadamente la mayoría de códigos numéricos que se encuentran escritos para su determinación, requieren un conocimiento más que básico de programación. Más precisamente, estos

* fdubeibe@gmail.com

Este trabajo es publicado por la Sociedad Colombiana de Física y distribuido en open acces según los términos de la licencia Creative Commons Attribution.

casi que en su totalidad se encuentran escritos en lenguajes C, C++, Fortran y en el mejor de los casos en MATLAB (ver e.g. [4,5,6,7]).

En el presente trabajo, se implementa un método modificado para el cálculo del máximo exponente de Lyapunov en el software Mathematica. Este software ha sido escogido por su popularidad, su capacidad de procesamiento simbólico, su agradable interface y su ambiente intuitivo y elemental de trabajo. Es preciso notar que, según nuestro conocimiento, el primer y único trabajo en esta línea, fue publicado hace más de una década por M. Sandri [8]. En particular, en su trabajo Sandri implementa el método de cálculo explícitamente usando un método de Runge-Kutta de orden 4 para la integración del sistema de ecuaciones. En este artículo, se pretende actualizar dicha rutina haciendo uso de las nuevas funciones y mejoras introducidas en las versiones más recientes del software. Además, se pretende mejorar el método calculando el máximo exponente de Lyapunov como un promedio sobre un conjunto de trayectorias.

El artículo se encuentra organizado como sigue: en la sección 2 se introduce la definición formal del máximo exponente de Lyapunov, seguidamente, en la sección 3, se presentan los sistemas particulares que serán objeto de estudio para probar la efectividad del método. En la sección 4 se introducen y discuten las entradas necesarias para la completa implementación del método en el software Mathematica. Finalmente en la sección 5 se comparan los valores obtenidos con los reportados en la literatura y se discuten las ventajas, limitaciones y precauciones a tener en cuenta para la implementación del método en diferentes casos.

2. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov miden la tasa promedio de divergencia o convergencia exponencial de trayectorias cercanas en el espacio de fase. Dado que condiciones iniciales cercanas corresponden a estados iniciales prácticamente idénticos, la divergencia exponencial de las órbitas implica la pérdida de la predictibilidad del sistema. Cualquier sistema que contenga al menos un exponente de Lyapunov positivo, se define como caótico, con la magnitud del exponente reflejando la escala temporal en la cual la dinámica se hace impredecible.

Para tener una definición más formal, empecemos por considerar el sistema dinámico

$$\dot{x} = F(x), \quad (1)$$

donde \dot{x} representa la derivada temporal de x y cuya solución, asumimos, está dada por $f^t(x)$. Asimismo, consideremos dos condiciones iniciales cercanas en el espacio de fase x_0 y $x_0 + \delta x_0$, donde δx_0 es una pequeña perturbación del punto x_0 . Después de un tiempo t , la solución para estas condiciones iniciales particulares, estará dada por $f^t(x_0)$ y $f^t(x_0 + \delta x_0)$. Si usamos la órbita descrita por la solución con condición inicial x_0 como referencia, la separación entre el par de trayectorias $\Delta f^t = f^t(x_0 + \delta x_0) - f^t(x_0)$, será una función del tiempo e indicará, si por ejemplo estas divergen, que el sistema es inestable. Para el caso particular de una órbita caótica, la función Δf^t variará erráticamente con el tiempo, por lo que se hace necesario introducir la tasa media exponencial de divergencia del par de trayectorias, esto es

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\Delta f^t}{\delta x_0} \right|, \quad (2)$$

donde λ se denomina exponente de Lyapunov y se asume $\delta x_0 \rightarrow 0$. Linealizando f^t , se satisface

$$\Delta f^t = f^t(x_0 + \delta x_0) - f^t(x_0) = D_{x_0} f^t(x_0) \cdot \delta x_0, \quad (3)$$

luego, la expresión (2) puede escribirse como

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|D_{x_0} f^t(x_0) \cdot \delta x_0|}{|\delta x_0|}. \quad (4)$$

En general, un sistema dinámico en un espacio de fase n -dimensional posee un espectro con n exponentes de Lyapunov, uno por cada dirección del espacio de fase. Además, puede demostrarse que si $F(x)$ en (1) es suave, el límite (4) existe y es igual al máximo exponente de Lyapunov [9]. Es importante notar que cualquier separación inicial δx_0 , contiene, en general, alguna componente en la dirección asociada con el máximo exponente de Lyapunov y debido al crecimiento exponencial de este último, el efecto de los otros exponentes se verá atenuado hasta desvanecerse con el tiempo.

3. Sistemas particulares

Consideramos dos sistemas caóticos particulares, los sistemas de Rössler [10] y Lorenz [11]. El criterio de selección es, primero por su simplicidad y segundo porque hacen parte de los sistemas más estudiados en la literatura de los sistemas dinámicos. En la Tabla 1 se presentan de manera más detallada los sistemas considerados, junto con sus respectivos exponentes de Lyapunov máximos esperados [12].

De la Tabla 1, puede notarse que el sistema de Rössler sólo cuenta con un término no lineal zx , mientras que

Cabe aclarar que en la referencia citada los exponentes de Lyapunov se encuentran calculados con el Logaritmo en base 2 y no en base e .

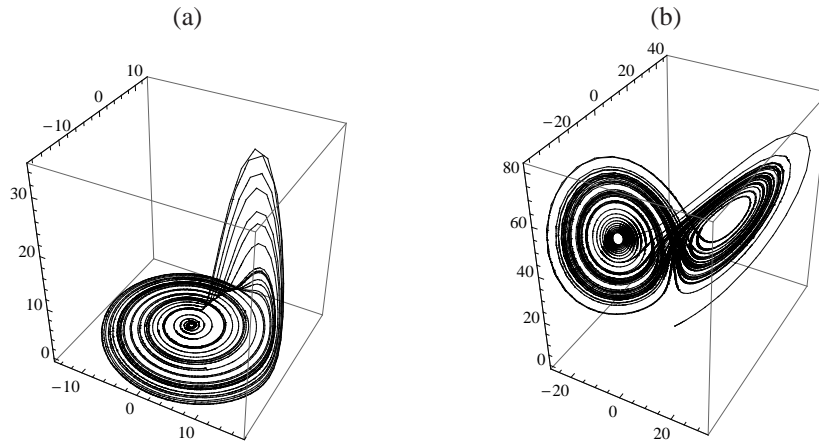


Figura 1. Solución para el sistema (a) Rössler con parámetros $a = 0.15$, $b = 0.20$, $c = 10$ y (b) Lorenz con parámetros $\sigma = 16$, $R = 45.92$, $b = 4$. Condiciones iniciales $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0.3$, $z_0 = 0.5$.

el sistema de Lorenz contiene dos términos no lineales xy y xz , haciendo que estos sistemas apenas satisfagan las condiciones mínimas para que un sistema continuo pueda exhibir un comportamiento caótico: no linealidad y al menos 3 grados de libertad. En la Figura 1, se presenta el atractor obtenido para la solución de los sistemas de Lorenz y Rössler con condiciones iniciales $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0.3$, $z_0 = 0.5$. Los parámetros utilizados son los mismos presentados en la Tabla 1.

Tabla 1. Sistemas particulares con sus respectivos máximos exponentes de Lyapunov esperados.

Sistema	Ecuaciones	Parámetros	λ esperado
Rössler	$\dot{x} = -y - z$ $\dot{y} = x + ay$ $\dot{z} = b + z(x - c)$	$a = 0.15$ $b = 0.20$ $c = 10.0$	0.09
Lorenz	$\dot{x} = \sigma(y - x)$ $\dot{y} = x(R - z) - y$ $\dot{z} = xy - bz$	$\sigma = 16.0$ $R = 45.92$ $b = 4.0$	1.50

4. Implementación del método

Para el cálculo de los exponentes usamos el enfoque del método variacional. En este caso, se debe resolver simultáneamente el sistema de ecuaciones (1) junto con la ecuación variacional (ver *e.g* [2])

$$\dot{\Phi} = D_x F(x) \cdot \Phi \quad (5)$$

Como ejemplo consideramos el sistema de Rössler.

donde $\Phi = D_{x_0} f^t(x_0)$, con condiciones iniciales $\Phi(t_0) = I$ y $x(t_0) = x_0$.

Empezamos definiendo el sistema dinámico con sus respectivos parámetros

```
In[1]:= F[{x_, y_, z_}] := {-y-z, x+a y, b+z(x-c)};
```

```
In[2]:= a = 0.15; b = 0.20; c = 10.0;
```

Ahora, definimos y calculamos el jacobiano

```
In[3]:= JacobianMatrix[f_List, v_List]:=
Outer[D, f, v];
```

```
In[4]:= J = JacobianMatrix[F[{y1[t], y2[t], y3[t]}],
{y1[t], y2[t], y3[t]}];
```

Introducimos las nuevas variables y escribimos el sistema de ecuaciones (1) y la ecuación variacional (5):

```
In[5]:= Phi = Table[{y_k[t], y_{k+1}[t], y_{k+2}[t]},
{k, 4, 12, 3}];
```

```
In[6]:= DPhi = Flatten[J . Phi];
```

```
In[7]:= EQ3 = Table[D[y_k[t], {t, 1}] ==
F[{y1[t], y2[t], y3[t]}][[k]], {k, 1, 3}]
```

```
In[8]:= EQ9 = Table[D[y_k[t], {t, 1}] == DPhi[[k - 3]],
{k, 4, 12}].
```

Definimos las condiciones iniciales para las ecuaciones (1) y (5),

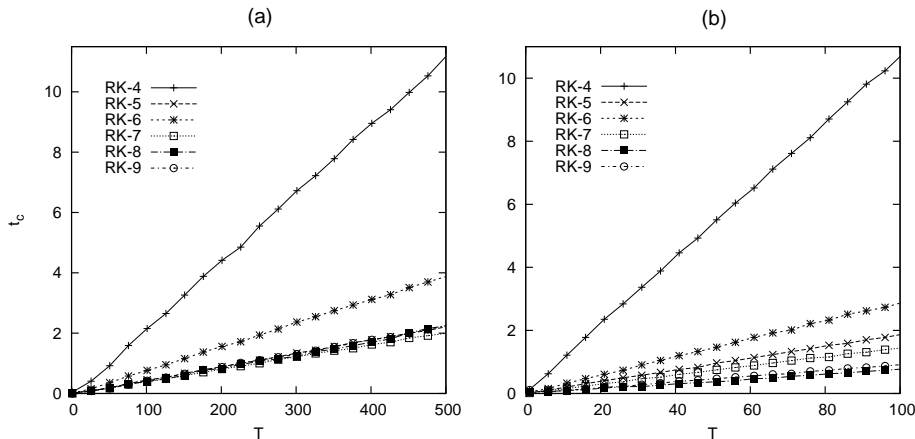


Figura 2. Gráfica del tiempo de evolución del sistema T vs. el tiempo de cómputo t_c , para diferentes órdenes del método Runge-Kutta. (a) Para el sistema Rössler y (b) para el sistema Lorenz.

```
In[9]:= YI9 = Table[yk[0] == If[Mod[k, 4] == 0, 1, 0],
{k, 4, 12}];
```

```
In[10]:= YI3 = {y1[0]==0.2, y2[0]==0.3, y3[0]==0.5};
```

A continuación, procedemos a identificar cuál es el método más adecuado para la integración del sistema de ecuaciones particular. Cabe aclarar que en cualquier caso es posible simplemente seleccionar la opción `Method -> Automatic`, para que Mathematica seleccione el método que considera más adecuado; sin embargo, con esta opción el sistema puede tardar mucho tiempo y además, puede presentar problemas aparentes de convergencia.

Con el ánimo de no trabajar con una caja negra y de usar un método estable que a su vez minimice el tiempo de cómputo, investigamos en particular, varios órdenes superiores para el método de Runge-Kutta. De la Figura 2 se observa que para el sistema de Rössler el tiempo de cómputo se minimiza cuando se utiliza el método de Runge-Kutta de orden 7, mientras que para el sistema de Lorenz el tiempo de cómputo es mínimo cuando se utiliza el método de Runge-Kutta de orden 8. Adicionalmente, el sistema de Rössler presenta problemas de rigidez para los métodos Runge-Kutta de orden 8 y 9.

Teniendo en cuenta lo anterior, procedemos a solucionar el sistema de ecuaciones (1), (5).

```
In[11]:= T = 2000;
```

```
In[12]:= sol = NDSolve[Join[EQ3, EQ9, YI3, YI9],
Table[yk[t], {k, 1, 12}], {t, 0, T}, StepMonitor :>
Sow[x], Method -> {"ExplicitRungeKutta",
"DifferenceOrder" -> 7}, MaxSteps -> Infinity,
AccuracyGoal -> 15];
```

```
In[13]:= PhiT = Table[{yk[t], Yk+1[t], Yk+2[t]},
{k, 4, 12, 3}] /. sol /. t -> T;
```

Con $\Phi(x_0, t) = D_{x_0} f^t(x_0)$ calculado, procedemos a aplicar la fórmula (4). Para esto, calculamos el máximo exponente de Lyapunov como un promedio sobre un conjunto de trayectorias, es decir, generamos aleatoriamente 100.000 vectores δx_0

```
In[14]:= Table[r[k] = Table[Random[], {3}],
{k, 1, 100000}];
```

y aplicamos la fórmula (4) repetidamente para cada uno de estos vectores

```
In[15]:= lambda = Table[Log[Norm[PhiT.r[k]]/Norm[r[k]]]/T,
{k, 1, 100000}];
```

Finalmente, calculamos el máximo exponente de Lyapunov promedio para el conjunto

```
In[16]:= Mean[lambda]
```

Es importante resaltar que aunque en teoría el tiempo de evolución T , presentado en la entrada 11 del código debe tender a infinito (ver Eq. 4), en la práctica, la tendencia hacia un valor estable del máximo exponente de Lyapunov tiene lugar para tiempos mayores a cierto umbral, como se observa en la figura 3.

5. Conclusiones

Los resultados obtenidos al aplicar el código descrito son: un exponente de Lyapunov de 0.088 para el siste-

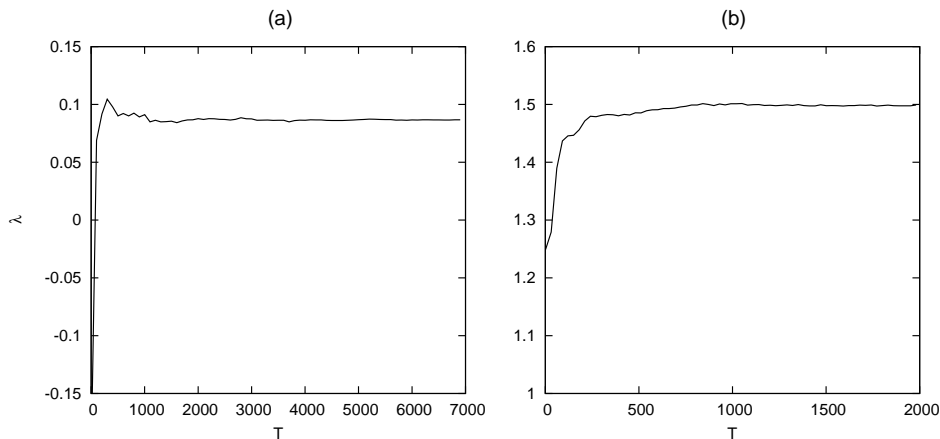


Figura 3. Gráfica del tiempo de evolución del sistema T vs. el máximo exponente de Lyapunov λ , para (a) el sistema Rössler integrado con RK-7 y (b) el sistema Lorenz integrado con RK-8.

ma Rössler y de 1.501 para el sistema Lorenz, estos valores coinciden bastante bien con los valores esperados presentados en la Tabla 1.

Es importante notar que la eficacia y la precisión del método se ha probado incluso con otros sistemas bien conocidos, que por cuestiones de espacio no se presentan en este trabajo, obteniendo los siguientes resultados: sistema Ueda usando RK-7, $\lambda = 0.104$, sistema Duffing usando RK-9, $\lambda = 0.11$ y flujo caótico disipativo cuadrático usando RK-8, $\lambda = 0.056$. Para estos sistemas, los valores esperados para el máximo exponente de Lyapunov son 0.103, 0.1 y 0.055, respectivamente.

La nueva alternativa de cálculo como un promedio sobre un conjunto de trayectorias, reduce el carácter fuertemente oscilatorio que exhiben usualmente las gráficas del máximo exponente de Lyapunov, permitiendo que esta cantidad se establezca más rápidamente, lo cual implica a su vez tiempos más cortos para el rango de evolución.

Se espera que este trabajo sirva no sólo como apoyo a la docencia en cursos de Sistemas Dinámicos, sino incluso para investigaciones de alto nivel, en las que los autores no estén interesados en profundizar en las sutilezas del cálculo numérico de los exponentes de Lyapunov.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado económicamente por la Dirección de Investigaciones de la Universidad de los Llanos, bajo el proyecto *Métodos numéricos para el estudio de la dinámica de partículas en relatividad general*. Por último, el autor desea agradecer al referee anónimo por las acertadas sugerencias y recomendaciones que llevaron a mejorar significativamente la calidad del presente trabajo.

Referencias

- [1] M. T. Rosenstein, J. J. Collins and C. J. De Luca, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **65**, 1993, p. 117.
- [2] T. S. Parker and L. O. Chua, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. New York, Springer Verlag, 1989, p. 305.
- [3] H. Broer, F. Takens and B. Hasselblatt, *Handbook of Dynamical Systems Vol. 3* Elsevier, 2010.
- [4] C. Liu, T. Liu, L. Liu, K. Liu, *Chaos, Solitons & Fractals*, **22**, 2004, p. 1031.
- [5] S. Mohammadi, 2009. LYAPROSEN: MATLAB function to calculate Lyapunov exponent, Statistical Software Components, T741502, Boston College Department of Economics.
- [6] F. Sattin, *Computer Physics Communications*, **107**, 1997, p. 253.
- [7] J.B. Dingwell, *Lyapunov Exponent*, ed: M. Akay *The Wiley Encyclopedia of Biomedical Engineering*. New York, John Wiley & Sons, 2006, 14 pag.
- [8] M. Sandri, *Mathematica J.*, **6**, 1996, p. 78.
- [9] V. I. Oseledec, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **19**, 1968, p. 197.
- [10] O. E. Rössler, *Physics Letter A*, **57**, 1976, p. 397.
- [11] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 1963, p. 130.
- [12] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, *Physica*, **16 D**, 1985, p. 285.